

大交会角约束下非线性系统三维能量最优制导律*

祝月,徐俊艳,王晓东,宋勋,王蒙一

(北京电子工程总体研究所,北京 100854)

摘要:为了满足高速非机动飞行器协同作战中大交会角约束和降低能量消耗,建立了三维耦合运动学模型,设计了大交会角约束下非线性系统的三维最优制导律。分析了三维解耦制导模型在大交会角情况下脱靶量和交会角控制精度差的机理,提出了一种适用于弹目高速非机动运动的非线性制导模型。在该模型的基础上,选择合适的控制变量,根据极小值原理设计了一种满足协同作战中所需大交会角约束的三维能量最优制导律。实验结果表明:制导律在三维耦合模型的脱靶量、交会角控制偏差及能量代价相比解耦模型分别降低了0.7 m, 1.1°, 200 g。证明了制导律控制精度高、能量消耗低。

关键词:非线性;大交会角约束;能量最优;三维;协同作战;高速

doi:10.3969/j.issn.1009-086x.2022.03.007

中图分类号:TP273+.1;TJ765 文献标志码:A 文章编号:1009-086X(2022)-03-0047-08

Three-Dimensional Optimal Guidance Law for Non-Linear Systems with Large Constrained Impact Angles

ZHU Yue, XU Jun-yan, WANG Xiao-dong, SONG Xun, WANG Meng-yi

(Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854, China)

Abstract: In order to satisfy impact angle constraints and reduce energy cost under salvo attacks against high-speed non-maneuvering targets, a three-dimensional coupled model is established, and a 3D energy optimal guidance law for non-linear systems with large constrained impact angles is proposed. The reasons for the low accuracy of 3D decoupled model are discussed, and a 3D coupled model is established. Based on this model, the appropriate control variables are chosen, and the 3D energy optimal guidance law under large impact angle constraints is derived, based on minimum principle. Experimental results indicate that the performance of the proposed coupled model on miss distance, impact angle error and energy cost has improved 0.7 m, 1.1°, 200 g compared with decoupled model. It can prove the advantages of the guidance law on control precision and energy cost.

Keywords: non-linear; large impact angle; energy optimal; three-dimensional; salvo attack; high-speed

* 收稿日期:2021-11-04;修回日期:2022-02-06

基金项目:2020年度科技创新2030—“新一代人工智能”重大项目(2020AAA0108200)

第一作者简介:祝月(1995-),女,黑龙江哈尔滨人。助工,硕士,主要研究方向为导航制导与控制。

通信地址:100854 北京收信箱30分箱

0 引言

随着各国军事力量和科学技术的不断发展,过去单一飞行器之间的攻防对抗已经不能满足当前的作战需求。在当前信息化作战的背景下,为了提高打击精度和打击效果,多弹协同打击多目标的作战方式开始兴起^[1],并逐渐成为各国的研究热点。

在多弹协同打击多个目标的作战场景中,各导弹的发射时间受拦截弧段的影响不能任意给定,因此需要采用多弹齐射的方案^[2]。多弹齐射的制导律设计问题需要考虑诸多约束^[3]。首先,为避免前方导弹击中目标时的光电效应对传感器瞬间失灵的影响以及避免碰撞产生的碎片干扰,各导弹间的交会角要形成较大的差异。第二,为保证拦截精度,需要使得脱靶量尽可能小。同时,为保证工程可实现性,还需要使全程的能量消耗尽可能小。

根据国内外学者的相关研究,考虑交会角和脱靶量共同约束的制导方法可以总结为滑模变结构控制法(SMC)、最优控制法,以及剩余时间多项式拟合法(TPG)等三大类^[4]。文献[5-6]针对静止和低速目标设计了一种二维滑模制导律,在控制交会角的同时,能够使制导指令在交会前收敛到0。文献[7-8]针对导弹速度为常值及目标静止的情况提出了一种考虑末端脱靶量和交会角约束的二维最优制导律。其中,损失函数用能量代价除以剩余飞行时间的幂指数表示,而后通过求解线性二次型得到制导律的最终表达式。该论文通过计算导弹运动轨迹曲线对剩余飞行时间进行估计,提高了对脱靶量控制的精度。还有学者^[9-10]提出将制导指令作为剩余飞行时间的多项式(TPG)的制导方法,通过构造制导指令多项式各项的系数来满足交会角和脱靶量的约束。这种方法简便易行,同时过载的形式简明直观,便于对其进行约束。

通过对国内外现状的比对和分析,可以总结出当前研究存在的几点问题。首先,现有的研究主要集中在导弹速度恒定和目标静止的情况^[11-12]。这种情况下制导状态方程的设计和求解相对简单,同时也容易求解出较为精确的剩余飞行时间,其脱靶量和角度偏差都会比较小^[13]。然而,在协同打击高速非机动目标这一场景下,不但目标是高速运动的,导弹速度的大小通常也是时变的^[14]。解决这种情

况下制导律的设计问题对于工程应用十分必要。另外,现有制导律大多是基于二维场景提出的。对于三维制导律,尤其是大交会角约束下制导律的设计和分析存在较大欠缺。

为解决上述问题,本文针对多个导弹协同打击多个高速非机动目标的背景,将多对多制导律设计问题展开成多组一对一基本单元的制导律设计问题,提出了一种适用于弹目高速运动场景下的三维制导律。该制导律可以同时满足脱靶量、交会角和交会时间等多个约束,并且能够降低制导过程的能量代价,具有较强的理论意义和工程价值。

1 问题描述及模型建立

1.1 问题描述及假设

在本文研究的基于协同场景下多对多打击高速非机动目标的场景中,导弹间的信息交换用于提高导弹的抗干扰能力和目标的捕捉概率,而各个导弹制导指令的生成是相对独立的。在打击过程中,母弹升空后在一定的位置释放出子导弹,形成多组多对一或一对一的防御网络。假设导弹的反应时间和状态调整时间忽略不计。认为导弹和目标所受空气阻力忽略不计。在拦截过程中,目标受重力作用做高速非机动运动,导弹受重力和垂直于弹体方向的法向过载共同作用。

1.2 弹目相对运动模型

三维空间内的拦截几何如图1所示。

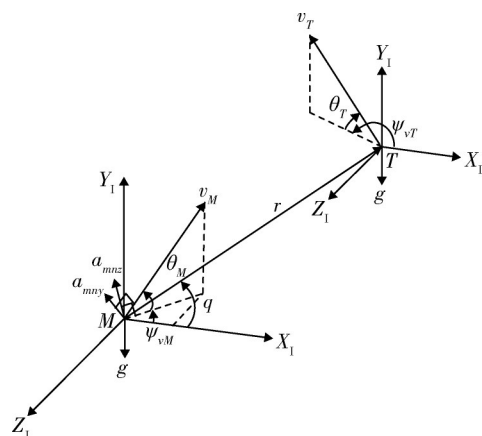


图1 三维空间内弹目拦截几何

Fig.1 Three-dimensional dynamics of missile and target

$OX_1Y_1Z_1$ 是以发射点为原点的惯性坐标系。 r 和 q 分别是弹目相对距离和视线角。 v_M 、 θ_M 、 ψ_{vM} 以及

v_T, θ_T, ψ_{vT} 分别是弹目速度、弹道倾角和弹道偏角。导弹和目标都受重力加速度 g 的作用,此外,导弹还受发动机施加的法向过载的作用。该过载在弹道坐标系中垂直于速度方向的投影为 a_{mny} 和 a_{mny} 。则导弹和目标在三维弹道坐标系实际的法向加速度 $a_{my}, a_{mz}, a_{ly}, a_{lz}$ 可表示为

$$a_{my} = a_{mny} - g \cos \theta_M, \quad (1)$$

$$a_{mz} = a_{mny}, \quad (2)$$

$$a_{ly} = -g \cos \theta_M, \quad (3)$$

$$a_{lz} = 0. \quad (4)$$

导弹和目标的速度及弹目相对距离在三维发射点惯性坐标系内的投影 $v_{mx}, v_{my}, v_{mz}, v_{lx}, v_{ly}, v_{lz}, r_x, r_y, r_z$ 可以表示为

$$\begin{bmatrix} v_{mx} \\ v_{my} \\ v_{mz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_M \cos \theta_M \cos \psi_{vM} \\ v_M \sin \theta_M \\ -v_M \cos \theta_M \sin \psi_{vM} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} v_{lx} \\ v_{ly} \\ v_{lz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_T \cos \theta_T \cos \psi_{vT} \\ v_T \sin \theta_T \\ -v_T \cos \theta_T \sin \psi_{vT} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T - x_M \\ y_T - y_M \\ z_T - z_M \end{bmatrix}. \quad (7)$$

将三维空间分解成铅垂和水平 2 个二维平面,通过分析 2 个平面内的运动,建立 2 个平面相互耦合的状态方程^[9]。2 个平面内的弹目相对运动几何分别如图 2~3 所示。图中, $v_{mxy}, v_{lxy}, r_{xy}, v_{mxz}, v_{lxz}, r_{xz}$ 分别是 v_M, v_T, r 在 $O_E X_1 Y_1$ 平面和 $O_E X_1 Z_1$ 平面上的投影。 $\dot{v}_{mxy}, \dot{v}_{lxy}, \dot{r}_{xy}, \dot{v}_{mxz}, \dot{v}_{lxz}, \dot{r}_{xz}$ 分别为它们的变化率。 $\theta_{mxy}, \theta_{OGLxy}$ 为弹道倾角 θ_M, θ_T 在 $O_E X_1 Y_1$ 平面上的投影,可以表示为

$$\theta_{OGLxy} = a \tan(-\tan \theta_T \sec \psi_{vT}), \quad (8)$$

$$\theta_{mxy} = a \tan(\tan \theta_M \sec \psi_{vM}). \quad (9)$$

则导弹与目标机动的动力学方程为

$$\dot{\theta}_M = \frac{a_{my}}{v_M}, \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_T = \frac{a_{ly}}{v_T}, \quad (11)$$

$$\dot{\psi}_{vM} = \frac{a_{mz}}{v_{mxz}}, \quad (12)$$

$$\dot{\psi}_{vT} = \frac{a_{lz}}{v_{lxz}}. \quad (13)$$

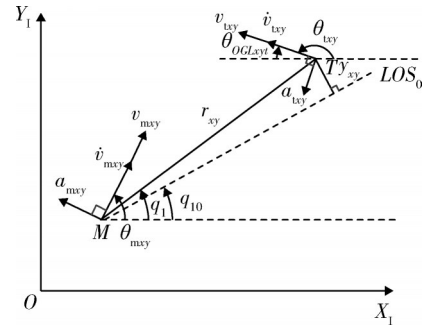


图 2 铅垂面弹目拦截几何

Fig.2 Dynamics on vertical plane

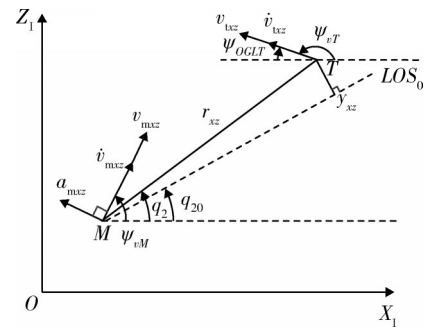


图 3 水平面弹目拦截几何

Fig.3 Dynamics on horizontal plane

1.3 制导模型

1.3.1 解耦模型的问题

传统的运动学模型通常将水平面和铅垂面解耦考虑^[15]。即,在考虑一个平面内的运动时,认为另一个平面内的弹道角瞬时不变,并且导数为 0。此时 a_{my} 和 a_{mz} 可以分别由 $O_E X_1 Y_1$ 和 $O_E X_1 Z_1$ 内的制导律生成。 $O_E X_1 Z_1$ 平面内 $\dot{v}_{mxz}, \dot{v}_{lxz}$ 的表达式为

$$\dot{v}_{mxz} = \dot{V}_M \cos \theta_M, \quad (14)$$

$$\dot{v}_{lxz} = \dot{V}_T \cos \theta_T. \quad (15)$$

可以发现,在式(14)~(15)的求导过程中没有考虑 $\dot{\theta}_M$ 和 $\dot{\theta}_T$ 项,即认为 θ_M 和 θ_T 是瞬时不变的。

$O_E X_1 Y_1$ 平面同理。

在本文研究的多个导弹协同打击高速运动的目标场景下,为保证拦截精度,部分导弹的交会角可能会非常大。在这种情况下,临近交会前弹道角的变化速率很大,会导致较大的脱靶量和角度偏差。因此,解耦模型在大交会角情况下并不适用。

1.3.2 三维耦合制导模型

针对解耦模型的问题,本节提出了一种将铅垂

面和水平面耦合考虑的三维制导模型。选取系统的状态变量为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{xy} \\ \dot{y}_{xy} \\ y_{xz} \\ \dot{y}_{xz} \\ \theta_M + \theta_T \\ \psi_{vM} + \psi_{OGLT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xy} \sin \Delta q_1 \\ v_{lyx} \sin(\theta_{OGLxyt} + q_{10}) - v_{mxy} \sin(\theta_{mxy} - q_{10}) \\ r_{xz} \sin \Delta q_2 \\ v_{lxz} \sin(\psi_{OGLT} + q_{20}) - v_{mxz} \sin(\psi_{vM} - q_{20}) \\ \theta_M + \theta_T \\ \psi_{vM} + \psi_{OGLT} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

将 X 对时间求导, 有:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{v}_{lyx} \sin(\theta_{OGLxyt} + q_{10}) + v_{lyx} \cos(\theta_{OGLxyt} + q_{10}) \dot{\theta}_{OGLxyt} - \\ \dot{v}_{mxy} \sin(\theta_{mxy} - q_{10}) - v_{mxy} \cos(\theta_{mxy} - q_{10}) \dot{\theta}_{mxy} \\ \dot{x}_4 \\ \dot{v}_{lxz} \sin(\psi_{OGLT} + q_{20}) + v_{lxz} \cos(\psi_{OGLT} + q_{20}) \dot{\psi}_{OGLT} - \\ \dot{v}_{mxz} \sin(\psi_{vM} - q_{20}) - v_{mxz} \cos(\psi_{vM} - q_{20}) \dot{\psi}_{vM} \\ \frac{a_{my}}{v_M} + \frac{a_{ly}}{v_T} \\ \frac{a_{mz}}{v_M \cos \theta_M} + \frac{a_{lz}}{v_T \cos \theta_T} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

式中: $\dot{v}_{mxy}, \dot{v}_{lyx}, \dot{\theta}_{mxy}, \dot{\theta}_{OGLxyt}, \dot{v}_{mxz}, \dot{v}_{lxz}$ 为 $v_{mxy}, v_{lyx}, \theta_{mxy}, \theta_{OGLxyt}, v_{mxz}, v_{lxz}$ 对时间的导数。令:

$$d_1 = \dot{v}_{lyx} \sin(\theta_{OGLxyt} + q_{10}), \quad (18)$$

$$d_2 = v_{lyx} \cos(\theta_{OGLxyt} + q_{10}) \dot{\theta}_{OGLxyt} - \dot{v}_{mxy} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_M \sin^2 \psi_{vM}} \sin(\theta_{mxy} - q_{10}), \quad (19)$$

$$d_3 = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_M \sin^2 \psi_{vM}}} \cos \theta_M \cdot \sin \theta_M \sin^2 \psi_{vM} \sin(\theta_{mxy} - q_{10}), \quad (20)$$

$$d_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_M \sin^2 \psi_{vM}}} \cos \theta_M \cdot \sin \psi_{vM} \cos \psi_{vM} \sin(\theta_{mxy} - q_{10}), \quad (21)$$

$$d_5 = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_M \sin^2 \psi_{vM}} \cos(\theta_{mxy} - q_{10}) \cdot \frac{(1 + \tan^2 \theta_M) \sec \psi_{vM}}{1 + \tan^2 \theta_M \sec^2 \psi_{vM}}, \quad (22)$$

$$d_6 = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_M \sin^2 \psi_{vM}} \cos(\theta_{mxy} - q_{10}) \cdot \frac{\tan \theta_M \tan \psi_{vM} \sec \psi_{vM} \sec \theta_M}{1 + \tan^2 \theta_M \sec^2 \psi_{vM}}, \quad (23)$$

$$d_7 = \dot{v}_{lxz} \sin(\psi_{OGLT} + q_{20}), \quad (24)$$

$$d_8 = v_{lxz} \cos(\psi_{OGLT} + q_{20}) \dot{\psi}_{OGLT} - \dot{v}_{vM} \cos \theta_M \sin(\psi_{vM} - q_{20}), \quad (25)$$

$$d_9 = \sin \theta_M \sin(\psi_{vM} - q_{20}), \quad (26)$$

$$d_{10} = -\cos(\psi_{vM} - q_{20}), \quad (27)$$

$$d_{11} = \frac{1}{v_M}, \quad (28)$$

$$d_{12} = \frac{1}{v_T}, \quad (29)$$

$$d_{13} = \frac{1}{v_{mxz}}, \quad (30)$$

$$d_{14} = \frac{1}{v_{lxz}}. \quad (31)$$

可以得到系统的状态空间表达式为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_3 + d_5 & d_4 + d_6 \\ 0 & 0 \\ d_9 & d_{10} \\ d_{11} & 0 \\ 0 & d_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 + d_2 \\ 0 \\ d_7 + d_8 \\ d_{12} \\ d_{14} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

2 制导律设计

本小节将以三维耦合制导模型为基础, 设计一种考虑交会角和脱靶量共同约束的三维能量最优制导律。三维能量最优制导律的损失函数如下:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (a_{my}^2 + a_{mz}^2) dt, \quad (33)$$

式中: a_{my}, a_{mz} 为三维弹道坐标系中导弹实际的法向加速度, 可以得到哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2} (a_{my}^2 + a_{mz}^2) + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 x_4 + \lambda_4 \dot{x}_4 + \lambda_5 \dot{x}_5 + \lambda_6 \dot{x}_6, \quad (34)$$

代入状态方程并对控制变量求偏导, 得到系统的控制方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial a_{my}} = a_{my} + (d_3 + d_5)\lambda_2 + d_9\lambda_4 + d_{11}\lambda_5 = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial a_{mz}} = a_{mz} + (d_4 + d_6)\lambda_2 + d_{10}\lambda_4 + d_{13}\lambda_6 = 0. \end{cases} \quad (35)$$

解之,可得:

$$\begin{cases} a_{my} = -(d_3 + d_5)\lambda_2 - d_9\lambda_4 - d_{11}\lambda_5, \\ a_{mz} = -(d_4 + d_6)\lambda_2 - d_{10}\lambda_4 - d_{13}\lambda_6. \end{cases} \quad (36)$$

系统的终端状态 $x_1(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f)$ 和 $x_6(t_f)$ 固定, $x_2(t_f), x_4(t_f)$ 自由。这是一个终端状态部分固定系统的制导律设计问题。系统的协态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = -\lambda_3, \\ \dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = 0, \\ \dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial H}{\partial x_6} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

求解协态变量,可得:

$$\begin{cases} \lambda_1 = k_1, \\ \lambda_2 = k_1 t_{go}, \\ \lambda_3 = k_3, \\ \lambda_4 = k_3 t_{go}, \\ \lambda_5 = k_5, \\ \lambda_6 = k_6, \end{cases} \quad (38)$$

其中, k_1, k_3, k_5, k_6 为待求参数。可以得到过载的最终形式:

$$\begin{cases} a_{my} = -(d_3 + d_5)k_1 t_{go} - d_9 k_3 t_{go} - d_{11} k_5, \\ a_{mz} = -(d_4 + d_6)k_1 t_{go} - d_{10} k_3 t_{go} - d_{13} k_6, \end{cases} \quad (39)$$

其中, $t_{go} = t_f - t$ 表示剩余飞行时间,需要根据当前时刻的弹目相对距离 r 和视线方向的相对速度 \dot{r} 估计:

$$t_{go} = -\frac{r}{\dot{r}}. \quad (40)$$

只要求解出系统的终端状态 k_1, k_3, k_5, k_6 , 便可以得到系统的控制输入。接下来将利用系统的终端状态 $x_1(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f)$ 和 $x_6(t_f)$ 来求解这 2 个未知参数。系统的终端状态可以表示成:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_3(t_f) \\ x_5(t_f) \\ x_6(t_f) \end{bmatrix} = D \left[\Phi(t_f, t) X(t) + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \xi) C(\xi) d\xi \right] + \dots$$

$$D \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \xi) B(\xi) u(\xi) d\xi, \quad (41)$$

其中,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

$\Phi(t_f, t)$ 为系统的状态转移矩阵。采用欧拉积分,可以将式(41)化简为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_f \\ \psi_{ef} \end{bmatrix} = (I_1 + I_2) + I_3 K. \quad (43)$$

利用伪逆函数 pinv , 可以求出未知参数 K :

$$K = \text{pinv} \left[I_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_f \\ \psi_{ef} \end{bmatrix} - I_1 - I_2 \right) \right], \quad (44)$$

代入式(39), 即可得到导弹在弹道系下实际法向加速度 a_{my}, a_{mz} 的数值解。根据式(1), (2)可以得到弹道系下垂直于速度方向的控制指令 a_{mn_y}, a_{mn_z} 。通过坐标变换, 将 a_{mn_y}, a_{mn_z} 转换到弹体坐标系, 得到实际的过载指令。 a_{mn_y}, a_{mn_z} 到弹体坐标系下过载 a_{myq}, a_{mzq} 的转换关系为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_{myq} \\ a_{mzq} \end{bmatrix} = C_2^1 \begin{bmatrix} a_v \\ a_{mn_y} \\ a_{mn_z} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

式中: a_v 项是垂直于弹体方向的过载在导弹速度方向上的分量。据此解出:

$$a_{myq} = a_{mn_y} / \cos(\vartheta - \theta), \quad (46)$$

$$a_{mzq} = [a_{mn_z} - a_{mn_y} \tan(\vartheta - \theta) \sin(\psi - \psi_v)] / \cos(\psi - \psi_v), \quad (47)$$

$$a_v = -\tan(\vartheta - \theta) \cos(\psi - \psi_v) a_{mn_y} + \tan(\psi - \psi_v) [a_{mn_z} - a_{mn_y} \tan(\vartheta - \theta) \sin(\psi - \psi_v)]. \quad (48)$$

考虑 a_v 影响后的速度变化率为

$$\dot{v}_M = a_v - g \sin \theta_M. \quad (49)$$

3 仿真校验

本节将通过仿真分析,验证制导律对脱靶量和交会角偏差控制的有效性。 $O_E X_1 Y_1$ 和 $O_E X_1 Z_1$ 平面上的零控脱靶量表达式为

$$Zem_{xy} = r_{xy} \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{v}_{mxy} - \mathbf{v}_{txy}) \cdot \mathbf{r}_{xy}}{|\mathbf{v}_{mxy} - \mathbf{v}_{txy}| \cdot r_{xy}} \right)^2}, \quad (50)$$

$$Zem_{xz} = r_{xz} \sqrt{1 - \left(\frac{(\mathbf{v}_{mxz} - \mathbf{v}_{txz}) \cdot \mathbf{r}_{xz}}{|\mathbf{v}_{mxz} - \mathbf{v}_{txz}| \cdot r_{xz}} \right)^2}. \quad (51)$$

能量消耗定义为

$$E = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{a_{myq}^2 + a_{mzq}^2} dt. \quad (52)$$

导弹在重力加速度下飞行,且受垂直于弹体方向的法向过载控制。目标仅在重力加速度作用下飞行。模型解算周期为 0.001 s,制导周期 0.02 s。末端期望交会倾角和交会偏角范围取 $-35^\circ \sim 35^\circ$ 。制导的初始条件见表 1。图 4~6 为三维弹目运动轨迹和弹体系下的法向过载。

表 1 选择的初始值
Table 1 Initial values

变量	初始值
导弹位置/km	(100,200,100)
目标位置/km	(500,600,500)
导弹初速度/(km·s ⁻¹)	4
目标/(km·s ⁻¹)	5
$\theta_M/(^\circ)$	35.26
$\psi_{zM}/(^\circ)$	-45
$\theta_T/(^\circ)$	-35.264 4
$\psi_{zT}/(^\circ)$	135

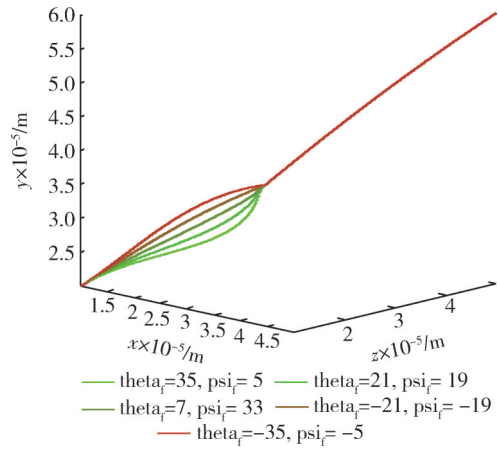


图 4 弹目三维运动轨迹

Fig.4 Three-dimensional trajectories of missile and target

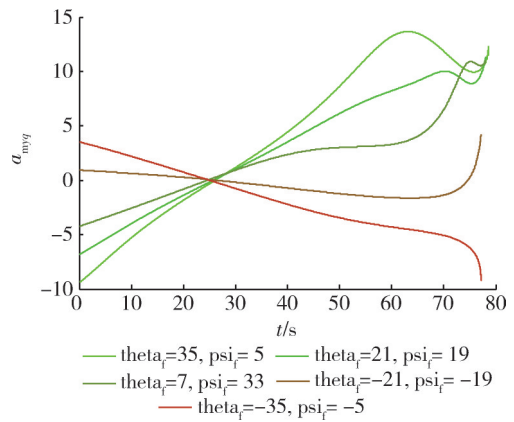


图 5 弹体系 y 轴方向需用过载

Fig.5 Normal load on y axis

表 2 记录了终端脱靶量、交会角偏差及总能量消耗。终端脱靶量的绝对值的范围为 0.000 013 m 到 0.234 181 m,交会角偏差的范围为 $0.000 01^\circ \sim 0.000 22^\circ$,满足攻击时对脱靶量和交会角精度的要求。

表 2 命中时刻状态值
Table 2 Values at impact time

交会倾角/($^\circ$)	交会偏角/($^\circ$)	终端脱靶量/m	倾角偏差/($^\circ$)	偏角偏差/($^\circ$)	总能量代价/g
-35	-5	0.119 474	0.000 196	0.000 036	221.985 601
-21	-19	0.234 181	-0.000 094	-0.000 026	199.330 336
7	33	0.006 239	0.000 025	-0.000 034	440.970 665
21	19	0.000 013	-0.000 066	-0.000 110	456.854 200
35	5	0.028 763	-0.000 220	0.000 010	530.796 200

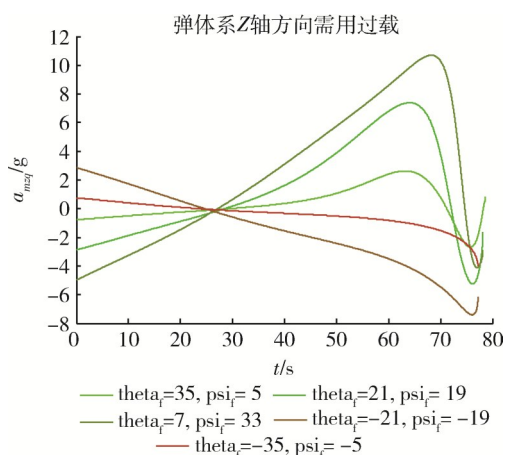


图6 弹体系Z轴方向需用过载

Fig.6 Normal Load on Z axis

接下来将对本文提出的耦合模型与解耦模型^[9]进行对比和分析,以证明在大交会角情况下,耦合模型在脱靶量、交会角控制偏差和能量代价上的优越性。

基于文献[9]建立的解耦模型,通过建立和求解最优控制的协态方程和横截条件便可以得到 a_{my} 和 a_{mz} 的最终表达式。 $O_E X_1 Y_1$ 和 $O_E X_1 Z_1$ 平面上的损失函数可以分别表示为

$$J_{XY} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a_{my}^2 dt, \quad (53)$$

$$J_{XZ} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a_{mz}^2 dt. \quad (54)$$

选用表1的初始值,设定模型解算周期0.001 s,制导周期0.02 s。末端期望交会倾角和交会偏角范

围取 $-35^\circ \sim 35^\circ$ 。得到解耦模型的终端脱靶量和交会角偏差,并将耦合模型的终端脱靶量和交会角偏差作为对比,记录在表3中。

表3中的数据表明,在相同的交会倾角和交会偏角下,耦合模型的能量代价要明显优于解耦模型,并且终端脱靶量和交会角偏差更小。当期望的交会倾角和交会偏角增大时,解耦模型的终端脱靶量和交会角偏差也会随之增大。这个结果表明,在末端存在交会角约束,尤其是期望的值较大时,按照耦合模型推导的制导律要明显优于解耦模型。

以上仿真考虑的为理想工况。接下来将在此基础上,增加误差干扰和最大过载限制,对交会角约束下的能量最优制导律进行仿真分析。各个量测量的误差范围如表4所示。

将导弹的最大可用过载限制为10。仿真初值按照表1给定,交会倾角和偏角的范围取 $-10^\circ \sim +6^\circ$ 。模型解算周期为0.001 s,制导周期0.02 s。对表2中的5组交会角分别计算1000条弹道,并将这5000次仿真及指标取绝对值,计算其均值和标准差,记录在表5中。

根据表5记录的数值,脱靶量绝对值的均值可以控制在0.750 m,标准差可以控制在0.297 m。此外,交会角偏差绝对值的均值可以控制在 0.18° 以内,方差可以控制在 0.07° 以内。由此可以得出,本文提出的制导律可以在有效地控制交会角的同时满足命中的精度要求。

表3 命中时刻状态值

Table 3 Values at impact time

交会倾角/ $(^\circ)$	交会偏角/ $(^\circ)$	制导律	终端脱靶量/m	倾角误差/ $(^\circ)$	偏角误差/ $(^\circ)$	总能量代价/g
-35	-5	耦合	0.119	0	0	221.9
		解耦	0.652	1.150	0.058	275.7
-21	-19	耦合	0.234	0	0	199.33
		解耦	10.94	5.044	0.622	418.9
7	19	耦合	0.031	0	0	321.8
		解耦	0.681	0.826	0.519	515.5
21	12	耦合	0.009	0	0	411.8
		解耦	0.461	0.764	0.920	555.2
35	5	耦合	0.028	0	0	530.7
		解耦	0.026	0.129	0.441	577.2

表 4 量测误差

Table 4 Measurement error

状态量	误差范围
$q, \psi_M, \psi_T, \theta_M, \theta_T, \psi_T / (^\circ)$	(-0.01, 0.01)
$\dot{q} / (^\circ \cdot s^{-1})$	(-0.02, 0.02)
$V_q, \dot{r}, V_M, V_T / (m \cdot s^{-1})$	(-1, 1)
r/m	(-1, 1)

表 5 性能指标统计值

Table 5 Statistics of performance

性能指标	μ	σ
脱靶量绝对值/m	0.749 925 8	0.296 691 286
弹道倾角偏差绝对值/ $(^\circ)$	0.177 143 0	0.021 449 496
弹道倾角偏差绝对值/ $(^\circ)$	0.071 939 2	0.063 087 778

4 结束语

本文对协同场景下导弹打击高速非机动目标的三维制导律设计问题进行了研究,考虑了交会角、脱靶量、能量代价等复杂多约束的共同影响,解决了弹目高速运动引起的模型非线性为制导律设计带来的困难,提高了大交会角情况下的脱靶量和交会角偏差控制的精度,实现了对每个目标的多角度同时打击,具有较强的理论价值和实际意义。

参考文献:

[1] 李强. 多导弹协同作战目标分配和制导律研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2017.
LI Qiang. Research on Target Assignment and Guidance Law for Cooperative Engagement of Multi-missile [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.

[2] ZHU Y, XU J Y. An Energy Optimal Guidance Law for Non-linear Systems Considering Impact Angle Constraints [C] // AIRC '19, December 14-16, 2019, Cairo, Egypt.

[3] Shiyu Z, Rui Z. Cooperative Guidance for Multimissile Salvo Attack [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(6): 533-539.

[4] 刘树衍, 王航宇, 卢发兴. 多枚反舰导弹协同攻击在线目标分配[J]. 指挥控制与仿真, 2016, 38(1): 38-40.
LIU Shu-yan, WANG Hang-yu, LU Fa-xing. Online Target Distribution of Multiple Anti-ship Missiles [J]. Command, Control and Simulation, 2016, 38 (1) : 38-40.

[5] LEE C H, KIM T H, TAHK M J. Design of Impact Angle Control Guidance Law Via High-Performance Sliding Mode Control [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2012(227-2): 235-253.

[6] ZHANG G, LI F, ZHAO J H, et al. Impact-Time-Control Guidance Law for Multi-Missile Cooperative Model with Mobility of the Target Considered [J]. Command Control & Simulation, 2010, 32(1): 52-55.

[7] RYOO C K, CHO H, TAHK M J. Time-to-Go Weighted Optimal Guidance with impact Angle Constraints [J]. IEEE Transactions on Systems Technology, 2006(14-3): 483-492.

[8] CHEN Y, WANG J, SHAN J, et al. Cooperative Guidance for Multiple Powered Missiles with Constrained Impact and Bounded Speed [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2021, 44(4): 825-841.

[9] KIM T H, LEE C H, TAHK M J. Time-to-Go Polynomial Guidance Laws with Terminal Impact Angle/Acceleration Constraints [C] // 18th World Congress The International Federation of Automatic Control, 2011: 3915-3919.

[10] ZHANG Y, WANG X, WU H. A Distributed Cooperative Guidance Law for Salvo Attack of Multiple Anti-Ship Missiles [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(5): 1438-1450.

[11] HOU Z W, LIU L, WANG Y J. Time-to-Go Estimation for Terminal Sliding Mode Based Impact Angle Constrained Guidance [J]. Aerospace Science and Technology, 2017(71): 685-694.

[12] BISWAS B, KUMAR S R, MAITY A. Three-Dimensional Nonlinear Impact Angle Guidance for Maneuvering Targets [C] // International Federation of Automatic Control, 2018: 47-52.

[13] ZENG J, DOU L, XIN B. Multi-Objective Cooperative Salvo Attack Against Group Target [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2018, 31(1): 244-261.

[14] RYOO C K, CHO H, TAHK M J. Optimal Control Based Guidance Law with Impact Angle Constraint [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2005(28-4): 724-732.

[15] 熊少锋, 魏明英, 赵明元. 逆轨拦截机动目标的三维最优制导律 [J]. 航空学报, 2020, 41(1): 80-90.
XIONG Shao-feng, WEI Ming-ying, ZHAO Ming-yuan. Three-Dimensional Optimal Guidance for Counter-Orbit Interception of Maneuvering Targets [J]. Journal of Aeronautics, 2020, 41(1): 80-90.